Análisis Matemático 2

Primer parcial (prof. Hernández) **8-7-25**

1. Para la función compuesta $z = h_{(x,y)}$ definida por la composición de $z = f_{(u,v)} = 2u\sqrt{v}$ con $(u,v) = \left(\frac{y}{x}; \sqrt{y}\right)$, hallar una aproximación lineal para valores de x e y cercanos a $x = 2; y = 1$ respectivamente.

2. a) Hallar los puntos de la superficie $2x^2 - y^2 - 2z^2 = -30$ en que su plano tangente en dichos puntos sea perpendicular a la recta tangente a la curva dada por $\bar{X}_{(t)}) = \left(\frac{t^2}{2}; 3t; t-1\right)$ en el punto $(2,6,1)$

   b) Plantear la ecuación del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) hallado en a) con $z_0 < 0$

3. Hallar la curva ortogonal a la familia de curvas en la que, en cada punto, tiene recta tangente de pendiente igual al cociente entre la ordenada y la abscisa y pasa por $(-1; 2)$

4. Analizar derivabilidad en el origen para $f_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{x^3}{x+y} & si\ x+y \neq 0 \\ 0 & si\ x+y = 0 \end{cases}$

   ¿es diferenciable en el origen?

5. Demostrar: si $z = f_{(\bar{X})}$ es diferenciable en $\bar{A} \to f_{(\bar{X})}$ es continua en $\bar{A}$

6. Indicar las hipótesis para que la ecuación $F_{(x,y,z)} = 0$ defina una superficie en $\mathbb{R}^3$ en un intervalo del punto(a,b,c)

AM 2	Primer Parcial Prof: Hernandez	HOJA N° 1/2 FECHA 8-7-25

① Para la función compuesta $z = h_{(x,y)}$ definida por la composición $z = f(u,v) = 2u\sqrt{v}$ con $(u,v) = \left(\frac{y}{x}, \sqrt{y}\right)$, hallar una aproximación lineal para valores x e y cercanos a $x=2$, $y=1$ respectivamente

$$\bar{g}_{(x,y)} = \left(\frac{y}{x}, \sqrt{y}\right) \longrightarrow h_{(x,y)} = f(\bar{g}_{(x,y)})$$

En un entorno a (2,1) el plano tang es:

$$z = \underbrace{h_{(2,1)}}_{1} + h'_x(2,1)(x-2) + h'_y(2,1)(y-1) \quad ⊛$$

• $\boxed{h(2,1)} = f(\bar{g}_{(2,1)}) = f(1/2, 1) = \boxed{1 = h(2,1)}$

$$\bar{g}_{(2,1)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right) = (u,v) \to \begin{cases} u = 1/2 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$z = f_{(1/2,1)} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} = 1$$

• $\boxed{\left[h'_x(2,1) \quad h'_y(2,1)\right]}$

$$Dh_{(2,1)} = Df(\bar{g}_{(2,1)}) \cdot D\bar{g}_{(2,1)} =$$

$$= Df(1/2, 1) \cdot D\bar{g}_{(2,1)} = \left[2 \quad \frac{1}{2}\right]\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} h'_x & h'_y \\ \left[-\frac{1}{2}\right. & \left.\frac{5}{4}\right] \end{array}$$

$$f_{(u,v)} = 2u\sqrt{v} \to f'_u = 2\sqrt{v} \to f'_u(1/2, 1) = 2$$

$$f'_v = \frac{2u}{2\sqrt{v}} \to f'_v(1/2, 1) = \frac{1}{2}$$

$$D\bar{g}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix} \to D\bar{g}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

⊛ $$z = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2) + \frac{5}{4}(y-1) = \frac{4 - 2(x-2) + 5(y-1)}{4}$$

$$4z = 4 - 2x + 4 + 5y - 5 = 3 - 2x + 5y$$

$$\boxed{2x - 5y + 4z = 3}$$

NOTA

② a) Hallar los puntos de la Sup. S $2x^2 - y^2 - 2z^2 = -30$ en que su plano tangente sea perpendicular a la recta tangente a la curva dada por $\bar{X}(t) = \left(\frac{t^2}{2}, 3t, t-1\right)$ en $(2,6,1)$

$$(2,6,1) = \bar{X}(t_0) = \left(\underbrace{\frac{t_0^2}{2}}_{2}, \underbrace{3t_0}_{6}, \underbrace{t_0 - 1}_{1}\right) \rightarrow \boxed{t_0 = 2}$$

$$\boxed{(2,6,1) = \bar{X}(2)}$$

Hallo la direcc. de la recta tangente a C en $(2,6,1)$

$$\bar{X}'(t) = (t, 3, 1) \rightarrow \bar{X}'(2) = (2,3,1)$$

$$\boxed{\mathbb{L}: \beta(t) = t(2,3,1) + (2,6,1)} \quad t \in \mathbb{R}$$

$(2,6,1) \in S$ pues $2 \times 2^2 - 6^2 - 2 \times 1^2 = -30$ (cumple la ecuación)

$\Rightarrow$ en $(2,6,1)$ la recta tangente a C es $\perp$ a S

$$S: 2x^2 - y^2 - 2z^2 = -30 \rightarrow N_S = (4x, -2y, -4z)$$

N_S // N al plano tangente $\Rightarrow N_S = k \cdot N_{PT}$ ← No importa la proporción (tomo $k=1$)

quiero que el plano tangente sea $\perp$ $\mathbb{L}$

$$N_{PT} \; // \; \mathbb{L}$$

$$N_{PT} = k(2,3,1)$$

$$(4x, -2y, -4z) = (2k, 3k, k)$$

$$\begin{cases} 4x = 2k \rightarrow k = 2x \\ -2y = 3k \rightarrow k = -2/3\, y \\ -4z = k \rightarrow k = -4z \end{cases} \quad \begin{aligned} &2x = -\tfrac{2}{3}y \rightarrow \boxed{x = \frac{-y}{3}} \\ &-4z = -\tfrac{2}{3}y \rightarrow z = -\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{-4}\right)y \end{aligned}$$

$$\boxed{z = \frac{y}{6}}$$

$$\boxed{x = -y/3, \; z = y/6, \; y = y}$$

$$S: 2x^2 - y^2 - 2z^2 = -30 \Rightarrow 2\left(-\frac{y}{3}\right)^2 - y^2 - 2\left(\frac{y}{6}\right)^2 = -30$$

$y = 6 \rightarrow x = -2 \rightarrow z = 1 \rightarrow \boxed{P_1 = (-2,6,1)}$ $\quad -\frac{15}{18}y^2 = -30 \rightarrow y^2 = \frac{30 \times 18}{15} = 36$

$y = -6 \rightarrow x = 2 \rightarrow z = -1 \rightarrow \boxed{P_2 = (2,-6,-1)}$ $\quad \boxed{|y| = 6}$

b) Plantear la ec. del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) hallado en a) con $z_0 < 0$ $\quad P_2$

$$N(x,y,z) = N \cdot P_2 \Rightarrow \boxed{2x + 3y + z = -15}$$

$$N = (2,3,1) \qquad (2,3,1)(2,-6,-1) = 4 - 18 - 1 = -15$$

NOTA

AM 2	Primer Parcial Prof. Hernández	HOJA N° 2/2 FECHA 8-7-25

③ Hallar la curva ortogonal a la familia de curvas en los que, en cada punto, tiene recta tangente de pendiente igual al cociente entre la ordenada y la abscisa y pase por $(-1,2)$.

$$y' = \frac{y}{x} \longrightarrow y'_{\perp} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \rightarrow y\,dy = -x\,dx$$

integro m.a.m $\quad \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + C$

pasa por $(-1,2) \rightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \end{matrix} \longrightarrow \frac{(2)^2}{2} = -\frac{(-1)^2}{2} + C$

$$2 + \frac{1}{2} = C \rightarrow \boxed{C = \frac{5}{2}}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 5}$$

④ Analizar la derivabilidad en el origen para ¿es diferenciable en el origen?

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{x^3}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

$\check{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2 = 1$

$$f'((0,0),\check{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\check{v}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \quad ⊛$$

⊛ si $a+b=0 \rightarrow \lim_{h\to 0} 0 = 0 \rightarrow \boxed{f'((0,0),\check{v}) = 0 \text{ si } a+b=0}$

⊛ si $a+b \neq 0 \rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{h^{\cancel{3}\,2} a^3}{ha+hb} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 a^3}{\cancel{h}(a+b)} = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\to 0}{h} a^3}{a+b} = 0$

$$\boxed{f'((0,0),\check{v}) = 0 \quad \forall\, \check{v} \in \mathbb{R}^2}$$

Analizo continuidad para ver si es o no diferenciable

$f(0,0) = 0$

$$\lim_{xy\to(0,0)} f(x,y) \underset{\text{si } x+y=0}{\uparrow=} \lim_{xy\to(0,0)} \frac{x^3}{x+y} \begin{cases} \xrightarrow{\text{si } x=0} \lim = 0 \\ \xrightarrow[y=x^3-x]{\text{si}} \lim_{xy\to(0,0)} \frac{x^3}{x+x^3-x} = 1 \end{cases} \neq \therefore \nexists \lim$$

f NO cont en $(0,0)$

$$\boxed{f \text{ NO cont en } (0,0) \Rightarrow f \text{ NO dif. en } (0,0)}$$

NOTA

⑤ Demostrar que si $f(\bar{x})$ es diferenciable en $\bar{A} \Rightarrow f(\bar{x})$ es continua en $\bar{A}$

f es diferenciable ∴ en un entorno de $\bar{x}_0$:-

vector incremento

$$f(\bar{x}_0+\bar{N}) - f(\bar{x}_0) = \nabla f_{(\bar{x}_0)} \bar{N} + \varepsilon(\vec{N}) \|\vec{N}\|$$

$$\lim_{\vec{N}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{N}) = 0$$

$\bar{x}_0 \in Dom(f) \Rightarrow \exists\, f(\bar{x}_0)$ $f(\bar{x}_0)$ es un número real

$$\lim_{\vec{N}\to\vec{0}} f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0) \quad \text{I}$$

$\nabla f_{(\bar{x}_0)}$ existe porque f es diferenciable

$$\therefore \lim_{\vec{N}\to\vec{0}} \underbrace{\vec{\nabla} f(\bar{x}_0)}_{\in\mathbb{R}} . \underbrace{\vec{N}}_{\to 0} = 0$$

Entonces:

$$\lim_{\vec{N}\to\vec{0}} f(\bar{x}_0+\bar{N}) - f(\bar{x}_0) = \overbrace{\lim_{\vec{N}\to\vec{0}} \nabla f(\bar{x}_0) . \vec{N}}^{\to 0} + \overbrace{\lim_{\vec{N}\to 0} \varepsilon_N \|\vec{N}\|}^{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\bar{N}\to\bar{0}} f(\bar{x}_0+\bar{N}) - \lim_{\vec{N}\to\vec{0}} f(\bar{x}_0) = 0$$

$$\lim_{N\to 0} f(\bar{x}_0+\bar{N}) \overset{\text{I}}{=} f(\bar{x}_0) \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x_0}$$

⑥ Indicar las hipótesis para que la ecuación $F(x,y,z)=0$ defina una sup. en $\mathbb{R}^3$ en un intervalo del punto (a,b,c)

Hip
- $F \in C^1$
- $F(a,b,c) = 0 \longrightarrow (a,b,c) \in F(x,y,z) = 0$
- $F'_z(a,b,c) \neq 0$

NOTA